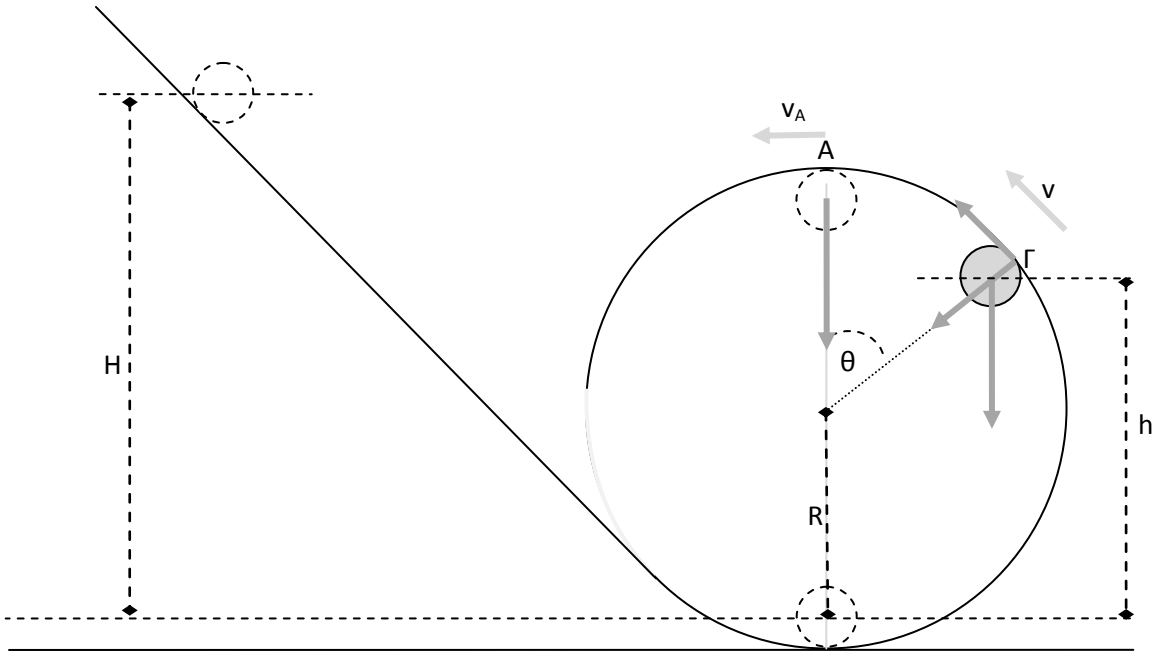
ΑΝΑΚΥΚΛΩΣΗ

Το αντικείμενο του σχήματος αφήνεται από ύψος Η και οδηγείται στο εσωτερικό του κατακόρυφου κοίλου κυλίνδρου, για να διαγράψει κυκλική τροχιά, ακτίνας R. Ζητείται το μικρότερο αρχικό ύψος Η, ώστε να εκτελέσει ασφαλή ανακύκλωση.

Το σώμα είναι ομογενές, έχει μάζα m,ακτίνα r και ροπή αδράνειας $I = \lambda \cdot m \cdot r^2$.



<u>1η προσπάθεια.</u> *(Προτείνεται από το σχολικό βιβλίο και από τα βοηθήματα που ασχολούνται με το θέμα.)* Υπολογίζουμε το ύψος εξασφαλίζοντας ότι δεν χάνεται η επαφή στο ανώτερο σημείο Α.

Αν μηδενιστεί οριακά η κάθετη δύναμη επαφής στο Α, το βάρος θα είναι η κεντρομόλος:

$$\frac{m \cdot {v_A}^2}{R} = m \cdot g \Leftrightarrow {v_A}^2 = g \cdot R \qquad (1)$$

ν το σώμα κυλίεται η Κινητική του Ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot {v_A}^2 + \frac{1}{2} I \cdot {\omega_A}^2 \overset{v=\omega \cdot r}{\Longleftrightarrow} K = \frac{1}{2} m \cdot {v_A}^2 \cdot (\lambda + 1)$$

και η Μηχανική Ενέργεια διατηρείται:

$$m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} m \cdot {v_A}^2 \cdot (\lambda + 1) + m \cdot g \cdot 2R \Leftrightarrow$$

$$m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot R \cdot (\lambda + 1) + m \cdot g \cdot 2R \Leftrightarrow$$

$$H = R \cdot \left(2{,}5 + \frac{\lambda}{2}\right)$$

<u>Αν το σώμα είναι **συμπαγής σφαίρα** (**λ=2/5**) το μικρότερο ύψος είναι **2,7R**, ενώ αν είναι ρόδα (**δακτύλιος**, **λ=1**), είναι **3R**.</u>

Όμως...

Στη θέση Γ, που η αντίστοιχη ακτίνα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, η αντίστοιχη ελάχιστη ταχύτητα θα υπολογιστεί από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m\cdot {v_\Gamma}^2\cdot(\lambda+1)=\frac{1}{2}m\cdot {v_A}^2\cdot(\lambda+1)+m\cdot g\cdot R\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$${v_\Gamma}^2=g\cdot R+\frac{2g\cdot R\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\lambda+1}\Leftrightarrow {v_\Gamma}^2=\frac{g\cdot R\cdot(3+\lambda-2\sigma\upsilon\nu\theta)}{\lambda+1}$$

Από την κυκλική κίνηση υπολογίζουμε τη δύναμη Ν:

$$N+m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{m\cdot {v_\Gamma}^2}{R}\Rightarrow N=\frac{m\cdot g\cdot(3+\lambda-2\sigma\upsilon\nu\theta)}{\lambda+1}-m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Rightarrow N=m\cdot g\cdot\frac{(3+\lambda)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\lambda+1}\qquad(2)$$

Κατά την κύλιση οι νόμοι της κίνησης δίνουν:

$$m\cdot g\cdot\eta\mu\theta-T=m\cdot a_{cm}$$

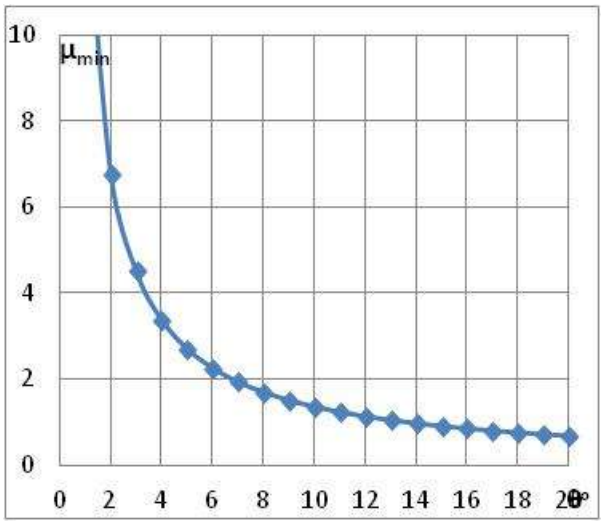
$$T\cdot r=\lambda\cdot m\cdot r^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\overset{a_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}r}{\Longrightarrow}m\cdot g\cdot\eta\mu\theta=T\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\Rightarrow$$

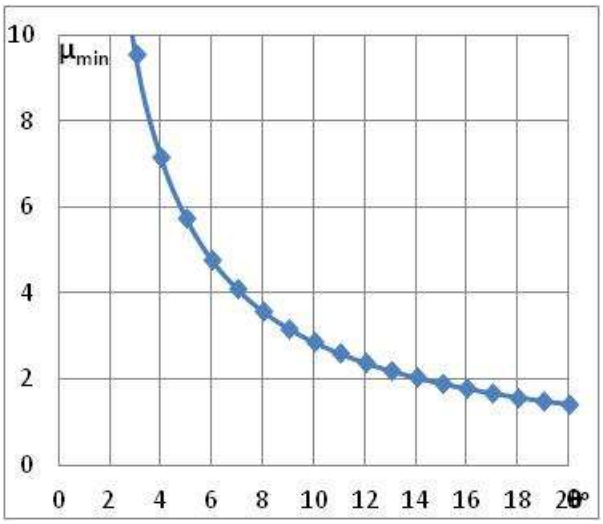
$$T=\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot m\cdot g\cdot\eta\mu\theta\qquad(3)$$

Η τριβή είναι στατική:

$$T<\mu\cdot N\Rightarrow\mu_{min}=\frac{T}{N}\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow}\boldsymbol{\mu_{min}=\frac{\lambda\cdot\eta\mu\theta}{(3+\lambda)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι για μικρές γωνίες ο απαιτούμενος συντελεστής τριβής γίνεται πολύ μεγάλος. Τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουν την τιμή του συντελεστή σε σχέση με τη γωνία σε μοίρες. Το πρώτο αντιστοιχεί σε συμπαγή σφαίρα και το δεύτερο σε δακτύλιο.





Οι τιμές αυτές είναι απαγορευτικές και αναγκαστικά, από κάποια γωνία και μετά, θα γίνεται **ολίσθηση**.

Επομένως η **Μηχανική Ενέργεια δεν διατηρείται** και το ελάχιστο ύψος θα είναι μεγαλύτερο από αυτό που υπολογίστηκε.

2η προσπάθεια. Υπολογίζουμε το ύψος εξασφαλίζοντας ότι διατηρείται η Μηχανική Ενέργεια και το σώμα δεν ολισθαίνει σε κανένα σημείο της τροχιάς του. Δηλαδή συνεχίζει η κύλιση και στο τυχαίο σημείο Γ, που βρίσκεται σε ύψος $h = R \cdot (1 + συνθ)$.

Για να μην ολισθαίνει και στο τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου που επιταχύνεται, θα πρέπει η γωνία κλίσης φ του επιπέδου να ικανοποιεί τη σχέση:

$$εφφ < \mu \cdot \frac{\lambda + 1}{\lambda}$$

Το σώμα θα έχει Μηχανική Ενέργεια:

$$E = \frac{1}{2} m \cdot {v_Γ}^2 + \frac{1}{2} I \cdot {\omega_Γ}^2 + m \cdot g \cdot R \cdot (1 + συνθ) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot {v_Γ}^2 \cdot (\lambda + 1) + m \cdot g \cdot R \cdot (1 + συνθ) \quad (4)$$

Και θα πρέπει να είναι ίση με την αρχική που είχε στο σημείο που αφέθηκε:

$$E = m \cdot g \cdot H \quad (5)$$

Το σώμα κυλίεται και ισχύει η εξίσωση (3) της προηγούμενης μελέτης για τη στατική τριβή

$$T = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot m \cdot g \cdot ημθ$$

$$T < \mu N \Rightarrow N > \frac{T}{\mu} \Rightarrow N > \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \frac{m \cdot g \cdot ημθ}{\mu} \quad (6)$$

Από την κυκλική κίνηση υπολογίζουμε τη δύναμη Ν:

$$N + m \cdot g \cdot συνθ = \frac{m \cdot {v_Γ}^2}{R} \overset{(6)}{\Rightarrow} \frac{m \cdot {v_Γ}^2}{R} > \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \frac{m \cdot g \cdot ημθ}{\mu} + m \cdot g \cdot συνθ \quad (7)$$

Επομένως η ελάχιστη Κινητική Ενέργεια, η ελάχιστη Μηχανική και το ελάχιστο ύψος θα είναι:

$$K_{min} = \frac{1}{2} m \cdot {v_{Γ\,min}}^2 \cdot (\lambda + 1) = m \cdot g \cdot R \left(\frac{\lambda \cdot ημθ}{2\mu} + \frac{(\lambda + 1) \cdot συνθ}{2} \right)$$

$$E_{min} = m \cdot g \cdot R \left(1 + \frac{\lambda \cdot ημθ}{2\mu} + \frac{(\lambda + 3) \cdot συνθ}{2} \right)$$

$$H = R \left(1 + \frac{\lambda \cdot ημθ}{2\mu} + \frac{(\lambda + 3) \cdot συνθ}{2} \right) = R \cdot f(\theta)$$

Η παράσταση:

$$f(\theta) = 1 + \frac{\lambda \cdot ημθ}{2\mu} + \frac{(\lambda + 3) \cdot συνθ}{2}$$

μεγιστοποιείται όταν $f(\theta)' = 0$ δηλαδή

$$\frac{\lambda \cdot συνθ}{2\mu} - \frac{(\lambda + 3) \cdot ημθ}{2} = 0 \Rightarrow εφθ = \frac{\lambda}{\mu(\lambda + 3)}$$

Ο υπολογισμός αυτής της γωνίας θα μας δώσει τη θέση που μεγιστοποιείται η ελάχιστη Μηχανική Ενέργεια, που απαιτείται για να μη γίνει ολίσθηση. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της Τριγωνομετρίας:

$$ημθ = \frac{εφθ}{\sqrt{1 + εφ^2θ}} \quad , \qquad συνθ = \frac{1}{\sqrt{1 + εφ^2θ}}$$

υπολογίζουμε την παράσταση *f(ϑ)* και την τιμή του ελάχιστου ύψους, που απαιτείται για να μη γίνει ολίσθηση:

$$H = R \cdot f(\theta) \Rightarrow \boldsymbol{H = R \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{\mu^2 \cdot (\lambda+3)^2 + \lambda^2}}{2 \cdot \mu}\right)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H = R \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\lambda+3)^2 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}\right)} \overset{\mu \to \infty}{\Longrightarrow} H = R \cdot (2{,}5 + \frac{\lambda}{2})$$

Παρατηρούμε ότι **για πολύ μεγάλους συντελεστές τριβής, οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα της πρώτης μελέτης**.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές που υπολογίστηκαν, με τη βοήθεια λογιστικών φύλλων, για την παράσταση *f(ϑ)* για διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής, για τη συμπαγή σφαίρα (λ=2/5) και το δακτύλιο (λ=1). Στην πρώτη μελέτη οι τιμές της *f(ϑ)* είχαν βρεθεί **2,7** για τη σφαίρα και **3** για το δακτύλιο.

μ	σφαίρα	δακτύλιος
1	2,712	3,062
0,9	2,714	3,076
0,8	2,718	3,095
0,7	2,724	3,124
0,6	2,732	3,167
0,5	2,746	3,236
0,4	2,772	3,358
0,3	2,826	3,603
0,2	2,972	4,202
0,1	3,625	6,385

Από τη μελέτη του πίνακα φαίνεται ότι δεν μπορεί να υπολογιστεί το ελάχιστο ύψος, χωρίς να γνωρίζουμε την τιμή του συντελεστή τριβής. Για τη σφαίρα, και για μεγάλους συντελεστές τριβής, οι τιμές για το ύψος είναι κοντινές, αλλά για το δακτύλιο διαφέρουν αρκετά, ειδικά στις μικρότερες τιμές του συντελεστή.

Οι δυο προσπάθειες υπολογισμού στηρίχτηκαν σε διαφορετικά κριτήρια. Η αλήθεια βρίσκεται κάπου ανάμεσα, αφού θα μπορούσε να γίνει η ανακύκλωση και με μια μικρή διαδρομή με ολίσθηση. Η πρώτη προσπάθεια οδηγεί σε σημαντικό σφάλμα, που για μεγάλους συντελεστές τριβής μικραίνει, ενώ η δεύτερη δίνει ασφαλέστερο αποτέλεσμα.

Γιάννης Θάνος