ΤΑΞΗ: Γ ΛΥΚΕΙΟΥ κατεύθυνσης

ΑΣΚΗΣΗ 1
Προσδιορισμός της ροπής αδράνειας κυλίνδρου

Η ροπή αδράνειας I ενός κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R, ως προς τον άξονά του, δίνεται από τη σχέση

$$I=k\,M\,R^2,$$

όπου k=1/2 αν ο κύλινδρος είναι συμπαγής και ½<k<1 αν πρόκειται για κυλινδρικό φλοιό.

Στην άσκηση αυτή θα προσδιορίσουμε πειραματικά τη σταθερή k.

Στο σχήμα φαίνεται η διάταξη που χρησιμοποιούμε.

Από τη διατήρηση ενέργειας μεταξύ του ανώτατου σημείου, απ' όπου αφήνεται ο κύλινδρος και του κατώτερου, που έχει αποκτήσει ταχύτητα v και γωνιακή ταχύτητα ω, έχουμε:

$$\frac{1}{2}kMR^2\omega^2+\frac{1}{2}Mv^2=Mgl\eta\mu\phi\ ,\quad v=\omega R\ ,\quad \eta\mu\phi=\frac{h}{S}$$

Η ταχύτητα προσδιορίζεται ως το πηλίκο της μικρής απόστασης Δl που διανύει ο κύλινδρος δια του αντιστοίχου χρόνου Δt, $v=\Delta l/\Delta t$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$1+k=\frac{2gl}{\Delta l^2}\cdot\frac{h}{S}\Delta t^2. \qquad (1)$$

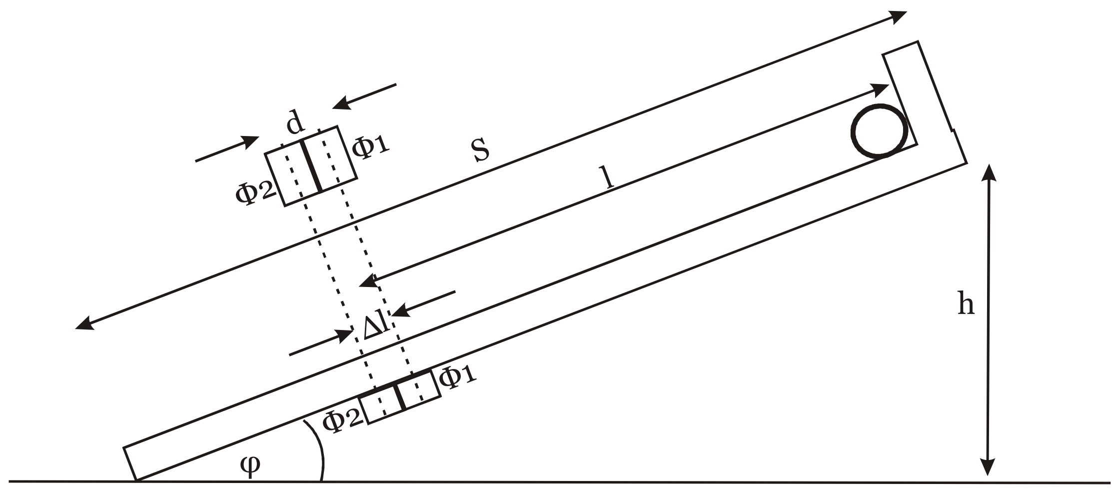
Γράφουμε την τελευταία σχέση ως

$$\Delta t^2=(1+k)\cdot\frac{\Delta l^2 S}{2\cdot gl}\cdot\frac{1}{h} \qquad (2)$$

που είναι κατάλληλη για τη γραφική παράσταση.

1 Η πειραματική διάταξη

Χρησιμοποιούμε το πλάγιο επίπεδο πολλαπλών χρήσεων. Αρχικά το πλάγιο επίπεδο οριζοντιώνεται με τη βοήθεια αλφαδιού.



<u>Παρατηρήσεις σχετικά με τη χρήση των φωτοπυλών (Φ)</u>: Προκειμένου να μετρήσουμε την ταχύτητα του κυλίνδρου στο κάτω μέρος της τροχιάς του, μπορούμε

να χρησιμοποιήσουμε μια μόνο Φ (και η ρύθμιση του χρονομέτρου να είναι F1). Ο χρόνος Δt τότε θα ισούται με το διάστημα μεταξύ εισόδου – εξόδου από τη Φ και η ταχύτητα θα είναι $v = 2R/\Delta t$. Επειδή όμως η δέσμη της Φ έχει ένα πεπερασμένο εύρος, ενδέχεται η Φ να ενεργοποιείται – απενεργοποιείται όταν ο κύλινδρος περνάει όχι ακριβώς από το μέσο της δέσμης. Η Φ δηλ. θα «βλέπει» να διέρχεται ένα μήκος διάφορο του $2R$. Το συστηματικό αυτό σφάλμα αίρεται αν χρησιμοποιήσουμε δύο Φ (και η ρύθμιση του χρονομέτρου να είναι F2) που θα δίνουν το χρόνο: έξοδος από τη Φ1 – έξοδος από τη Φ2. Σ΄ αυτή την περίπτωση η ταχύτητα θα είναι $v = \Delta l/\Delta t$, όπου Δl είναι η απόσταση μεταξύ των δύο Φ. Τα στελέχη των Φ πρέπει να εφάπτονται ώστε η μέτρηση του Δl να είναι ευκολότερη αλλά και ο τύπος της στιγμιαίας ταχύτητας προσεγγιστικά να ισχύει.

Τα μετρούμενα μεγέθη είναι:

1. Το σταθερό μήκος l από το ανώτατο σημείο εκκίνησης μέχρι το μέσον μεταξύ των Φ. Μετριέται με κανόνα.
2. Η σταθερή απόσταση Δl μεταξύ των κέντρων των Φ1 και Φ2. Κατά τον κατασκευαστή το στέλεχος των φωτοπυλών έχει πλάτος 1,5cm και εφόσον ο πομπός και δέκτης είναι ακριβώς κεντραρισμένοι στο στέλεχος, βρίσκουμε το $\Delta l = d/2 = 1{,}5\text{cm}$.
3. Η εκάστοτε ανύψωση h, μετριέται με το ηλεκτρονικό παχύμετρο.
4. Ο εκάστοτε χρόνος διέλευσης Δt μεταξύ των Φ1 και Φ2. (Η ρύθμιση του χρονομέτρου είναι F2.)

2 Ενδεικτικές μετρήσεις, εξαγόμενα

	συμπαγής	**κενός**		
h (cm)	**t (s)**	**t (s)**	**k συμπαγούς**	**k κενού**
0,979	0,0528	0,0614	0,512	1,045
2,026	0,0373	0,0432	0,562	1,095
2,980	0,0309	0,0356	0,577	1,093
4,146	0,0262	0,0301	0,577	1,081
5,047	0,0237	0,0273	0,571	1,084
6,039	0,0217	0,0249	0,576	1,075
7,330	0,0197	0,0227	0,576	1,093
8,636	0,0181	0,0207	0,568	1,051
10,036	0,0168	0,0193	0,569	1,072
10,784	0,0162	0,0185	0,568	1,045
			κμέσο=0,566	**κμέσο=1,074**

Στον παραπάνω πίνακα φαίνονται ενδεικτικές τιμές των μετρήσεων. Χρησιμοποιείται η σχέση (1) για τον υπολογισμό του k. Το EXCEL υπολογίζει τη μέση τιμή του k.

3 Σφάλματα

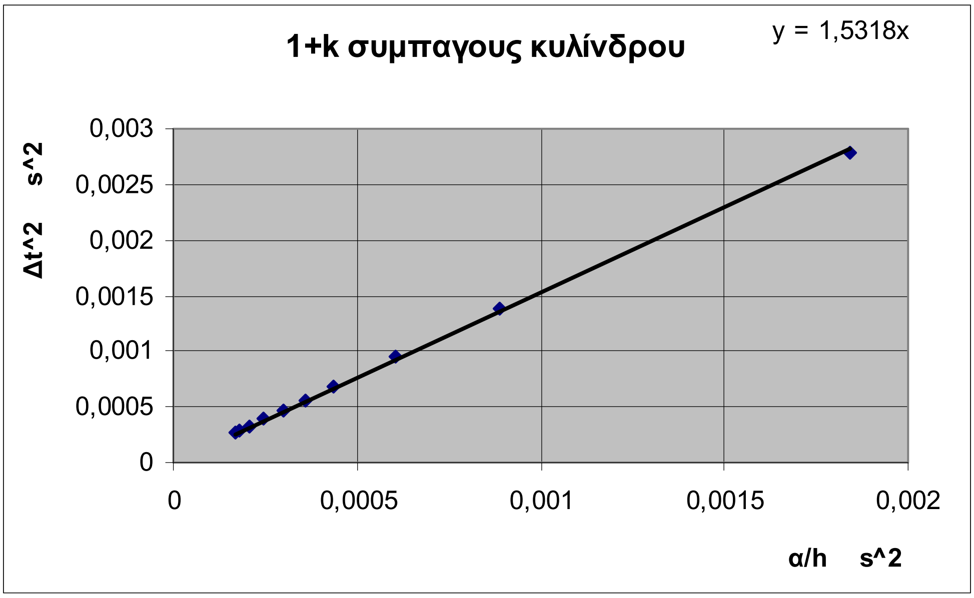
Το σφάλμα στη μέτρηση του k προέρχεται από τα επί μέρους σφάλματα Το ψηφιακό χρονόμετρο μετρά το χρόνο t με τρία σημαντικά ψηφία. Το μήκος S δίνεται από τον κατασκευαστή, S=36,5cm, το ύψος h μετριέται με το ηλεκτρονικό παχύμετρο με τέσσερα σημαντικά ψηφία, παρόμοια είναι και η γνώση του g. Για τα μεγέθη αυτά είναι λογικό να υποθέσουμε ένα σχετικό σφάλμα της τάξης του 10^{-3}. Για τη μέτρηση του l θεωρούμε ότι μετράμε την απόσταση l με ακρίβεια 0,5 mm, άρα εκτιμούμε το σφάλμα μικρότερο του 1%. Το σφάλμα στη μέτρηση του Δl οφείλεται κυρίως στη μη τέλεια επαφή των φωτοπυλών και εκτιμούμε ότι δεν μπορεί να είναι μικρότερο του 2%. Τέλος, από την (1) βρίσκουμε:

$$\delta k / k \cong 2\, \delta\Delta l / l \cong 4\%$$

4 Η γραφική παράσταση

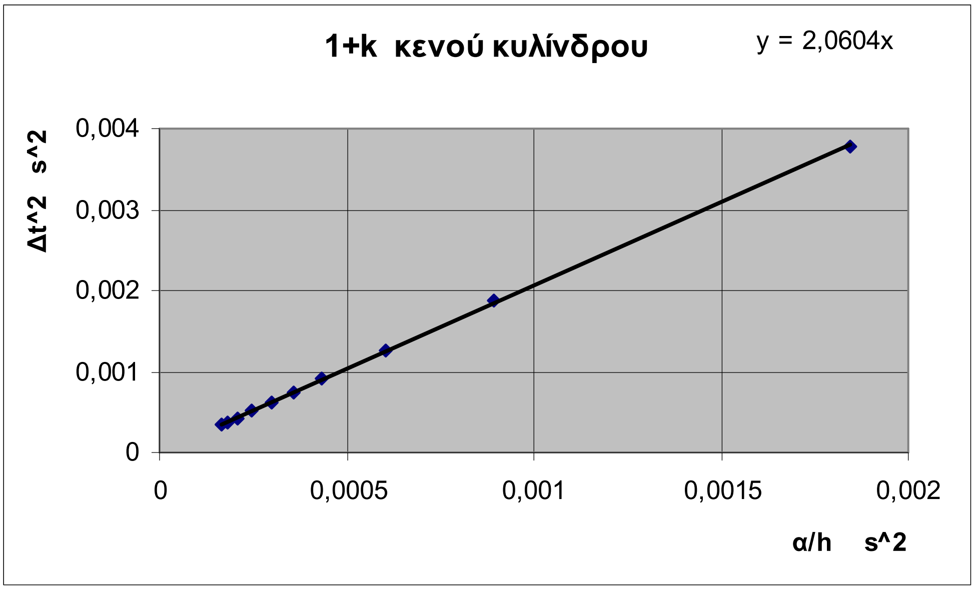
Η σχέση (2), με τις τιμές $\Delta l = 1{,}5\,cm$ $l = 23{,}2cm$ και $S = 36{,}5cm$ δίνει:

$$\Delta t^2 = (1+k)\cdot\alpha\cdot\frac{1}{h} \quad , \ \alpha = 0{,}0018\,s^2 cm \qquad (3)$$



Κάνουμε τη γραφική παράσταση της (3) και υπολογίζουμε, μέσω του ECXEL, την κλίση =1,5318, το k, k=0,5318 και το γράφουμε μαζί με το σφάλμα του:

$$\boxed{k = 0{,}53 \pm 0{,}02}$$



Ομοίως κάνουμε τη γραφική παράσταση για τον κενό κύλινδρο και βρίσκουμε από την κλίση k=1,0604. Άρα το k προκύπτει

$$\boxed{k = 1{,}06 \pm 0{,}04}$$

Παρατηρήσεις:

1. Το συστηματικό σφάλμα που κάναμε θεωρώντας ότι το πηλίκο $\Delta l / \Delta t$ ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα, μπορεί να διορθωθεί αν θεωρήσουμε τις ακριβείς σχέσεις. Η βελτίωση όμως είναι μικρότερη από το τυχαίο σφάλμα.
2. Κατά την επεξεργασία των μετρήσεων έχουμε αγνοήσει την ενδεχόμενη ολίσθηση. Προκειμένου να ελέγξουμε για ποια ανύψωση h ο συμπαγής κύλινδρος αρχίζει να ολισθαίνει, πραγματοποιήσαμε το εξής απλό πείραμα: Δύο όμοιοι κύλινδροι συνδέθηκαν με σελοτέιπ και αφέθησαν στο πλάγιο επίπεδο, ενώ αυξάναμε σταδιακά την κλίση του. Όταν το h έγινε 4,8cm, περίπου, το συσσωμάτωμα άρχισε να ολισθαίνει με σταθερή, κατ΄ εκτίμηση, ταχύτητα (Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε συντελεστή τριβής $\mu = \varepsilon\varphi\phi \cong \eta\mu\phi = 4{,}8/36{,}5 = 0{,}13$.) Άρα πιο αξιόπιστες τιμές είναι αυτές για μικρό h.